Старушенко Г.А., канд. техн. наук, професор
Національний технічний університет
«Дніпровська політехніка»

НЕСТАЦІОНАРНИЙ ТЕПЛООБМІН В КОМПОЗИТНИХ МЕМБРАНАХ

З проблемою енергозбереження, що як ніколи гостро стоїть наразі в Україні, безпосередньо пов'язані задачі нестаціонарного теплообміну, зокрема, в композитних середовищах. Важливість таких досліджень визначається їх широким практичним застосуванням у техніці [1, 2]. Так, теплообмін у періодичних пористих середовищах, що моделюють геометрію газоохолоджуваного ядерного реактора, становить важливу проблему як з погляду теоретичних досліджень, так і в плані її прикладного характеру [2]. Управління ядерним реактором вимагає знання його характеристик не тільки в стаціонарному, а й у перехідних режимах (пуск, зупинка, зміна потужності), а також у режимах, що виникають під час аварій (наприклад, зменшення або припинення подачі теплоносія внаслідок пошкодження насоса). Тобто, важливо знати поведінку апарату в динаміці.

Для дослідження нестаціонарної теплопровідності в композитних мембранах, що представляють собою матрицю з круглими включеннями, розташованими по квадратній або гексагональній сітці, запропоновано підхід, заснований на теорії осереднення. На межі волокон передбачається ідеальний контакт між різними матеріалами. Температурне поле моделюється рівнянням теплопровідності. Використання перетворення Лапласа, асимптотичної теорії осереднення та методу двохмасштабних розкладень дає можливість звести початкову задачу для багатозв'язної області до рекурентної системи крайових задач в однозв'язній області. Після розв'язання локальної задачі в області комірки – характерної структурної одиниці композиту – з осередненого рівняння визначаються коефіцієнти, що описують ефективні властивості композитного середовища.

Математично вихідна задача формулюється як крайова задача з початковими умовами [3]:

$$K^{\pm}\Delta_{xy}T^{\pm} = c^{\pm}\rho^{\pm}\frac{\partial T^{\pm}}{\partial t} \text{ в } \Omega_i^{\pm};\ T^{+} = T^{-},\ K^{+}\frac{\partial T^{+}}{\partial \mathbf{n}} = K^{-}\frac{\partial T^{-}}{\partial \mathbf{n}} \text{ на } \partial\Omega_i;\ T^{\pm} = F^{\pm}(x,y) \text{ при } t = 0, \quad (1)$$

де $\Delta_{xy}T^{\pm} = \dfrac{\partial^2 T^{\pm}}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 T^{\pm}}{\partial y^2}$; $x = \dfrac{X}{l}$; $y = \dfrac{Y}{l}$; $K^{\pm} = \dfrac{k^{\pm}}{l^2 c^{\pm}\rho^{\pm}}$;

X, Y – вихідні координати;

l – характерний розмір комірки композита;

T – температура;

ρ – щільність;

k – коефіцієнт теплопровідності;

c – питома теплоємність;

$\mathbf{n}$ – вектор зовнішньої нормалі до контуру включення;

$\Omega_i^{+}, \Omega_i^{-}$ – області матриці і включення відповідно;

$\partial\Omega_i$ – межа фаз композиту; індекси «+» і «-» позначають приналежність змінної відповідній області.

За перетворенням Лапласа задача (1) зводиться до вигляду:

$$K^{\pm}\Delta_{xy}T^{p\pm} = pT^{p\pm} - F^{\pm}(x,y) \text{ в } \Omega_i^{\pm};\ T^{p+} = T^{p-}, K^{+}\frac{\partial T^{p+}}{\partial \mathbf{n}} = K^{-}\frac{\partial T^{p-}}{\partial \mathbf{n}} \text{ на } \partial\Omega_i. \quad (2)$$

Наявність природного малого параметра $\varepsilon = \dfrac{l}{L}$,

де L – характерний розмір мембрани, дає можливість застосування асимптотичної теорії гомогенізації [4], тобто представлення розв'язку задачі (2) у вигляді асимптотичного ряду:

$$T^{p\pm}=T_0(x,y,p)+\varepsilon T_1^{\pm}(x,y,\xi,\eta,p)+\varepsilon^2 T_2^{\pm}(x,y,\xi,\eta,p)+\ldots, \qquad (3)$$

де $\xi = x/\varepsilon, \eta = y/\varepsilon$ – «швидкі» змінні.

Підставляючи розкладення (3) в крайову задачу (2) та розщеплюючи отримане рівняння за степенями малого параметра ε, отримуємо в першому наближенні задачу на комірці у вигляді:

$$\Delta_{\xi\eta}T_1^{\pm}=0 \text{ в } \Omega_i^{\pm};\ \ T_i^{+}=T_i^{-},\ K^{+}\left(\frac{\partial T_1^{+}}{\partial \bar{\mathbf{n}}}+\frac{\partial T_0}{\partial \mathbf{n}}\right)=K^{-}\left(\frac{\partial T_1^{-}}{\partial \bar{\mathbf{n}}}+\frac{\partial T_0}{\partial \mathbf{n}}\right) \text{ на } \partial\Omega_i\,. \qquad (4)$$

Після розв’язання задачі на комірці (4) осереднене рівняння представляється таким чином:

$$q\Delta_{xy}T_0=pT_0-\frac{1}{\left|\Omega_i\right|}\left(\iint\limits_{\Omega_i^{+}} F^{+}(x,y,\xi,\eta)\,d\xi d\eta+\iint\limits_{\Omega_i^{-}} F^{-}(x,y,\xi,\eta)\,d\xi d\eta\right), \qquad (5)$$

де q – ефективний параметр композитної мембрани.

Для різних значень геометричних та фізичних характеристик мембрани отримано аналітичні розв’язки задачі на комірці (4), за якими ефективний параметр визначається співвідношеннями:

1) Для композитної мембрани з круглими включеннями, розташованими по квадратній сітці:

а) для включень малих – середніх розмірів [5]:

$$q=\frac{1-f+\lambda(1+f)}{1+f+\lambda(1-f)}+\varepsilon_1^2\frac{1}{2}\cdot\frac{(\lambda-1)f}{1+f+\lambda(1-f)},\ \text{де}\ \ f=\frac{\pi a^2}{4},\ \lambda=\frac{K^{+}}{K^{-}},\ \varepsilon_1=1-\frac{2}{\sqrt{\pi}};$$

б) для високопровідних щільно упакованих включень [5]:

$$q=1-a+\frac{\lambda}{\lambda-1}\left(\frac{2\lambda\,\mathrm{arctg}\sqrt{\dfrac{\lambda(1+a)-a}{\lambda(1-a)+a}}}{\sqrt{(\lambda(1+a)-a)(\lambda(1-a)+a)}}-\frac{\pi}{2}\right)\ \text{при}\ \ \lambda>>1,\ 0<<a<1.$$

2) Для композитної мембрани з круглими включеннями, розташованими по гексагональній сітці:

а) для включень малих – середніх розмірів великої провідності [5]:

$$q=1+\frac{\sqrt{3}\sigma^2}{\sqrt{1-\sigma^2}}\mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt{3(1-\sigma^2)}}+\frac{\sigma^2}{\sqrt{3}}\left[\frac{2}{\sqrt{1-\sigma^2}}\left(2\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{1-\sigma}{1+\sigma}}+\mathrm{arctg}\frac{\sigma}{\sqrt{1-\sigma^2}}\right)-\frac{\pi}{2}\right]$$

$$\text{при}\ \ \sigma=\sqrt{\frac{\lambda-1}{\lambda+1}}\,a\le\frac{1}{\sqrt{3}};$$

б) для високопровідних щільно упакованих включень [5]:

$$q=\frac{2\sqrt{3}\sigma^2}{\sqrt{1-\sigma^2}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3\left(1-\sigma^2\right)}}+\frac{\sigma^2}{\sqrt{3}}\left\{-\frac{3}{2}\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}\sigma}+\frac{4}{\sqrt{1-\sigma^2}}\left[\operatorname{arctg}\left(\left(\sqrt{3}\sigma-\sqrt{3\sigma^2-1}\right)\sqrt{\frac{1-\sigma}{1+\sigma}}\right)-\right.\right.$$

$$-\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{2\left(\sqrt{3}\sigma-1-\sqrt{3\sigma^2-1}\right)\sqrt{1-\sigma^2}}{\left(1+\sqrt{3}\right)\left(1-\sqrt{3}\sigma\right)\sigma+\sqrt{3\sigma^2-1}\left(\left(1+\sqrt{3}\right)\sigma-2\right)+2}-\frac{1}{8}\operatorname{arctg}\left(\frac{2\sqrt{1-\sigma^2}}{\sigma}\right)\Bigg]-$$

$$\left.-\frac{\sqrt{3}}{4}\ln\frac{2+3\sigma^2+2\sqrt{3\left(3\sigma^2-1\right)}}{4-3\sigma^2}+\frac{\pi}{4}\right\}+1 \text{ при } \sigma\geq\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Після розв’язку осередненого рівняння (5) з осередненою початковою умовою визначаємо функцію $T_0\left(x,y,p\right)$. Остаточний розв’язок задачі отримуємо, здійснюючи зворотне перетворення Лапласа відомими чисельними або асимптотичними методами.

Таким чином, запропонований підхід дає можливість отримати аналітичний розв’язок задачі та може бути узагальнений на випадок включень іншої геометрії та довільної провідності.

Список використаних джерел

1. Darnowsky P., Furmanski P., Domansky R. Relation between thermal conductivity and coordination number for fibrereinforced composite with random distribution of fibres. *Archives of thermodynamics*. 2019. Vol. 40, No 1 (1). P. 21–48
2. Habibi Z. Homogénéisation et convergence à deux échelles lors d’échanges thermiques stationnaires et transitoires. Application aux coeurs des réacteurs nucléaires à caloporteur gaz : PhD Thesis. Paris, École Polytechnique, 2011. 224 p.
3. Andrianov I. V., Awrejcewicz J., Starushenko G. A. Non-stationary heat transfer in composite membrane with circular inclusions in hexagonal lattice structures. *Acta Mechanica*. 2022. Vol. 233, Is. 4. P. 1339–1350.
4. Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolaou G. Asymptotic analysis for periodic structures. Amsterdam : North-Holland Publishing Company, 1978. 700 p.
5. Starushenko G. A. Asymptotic methods and models in the theory of composite materials. LAP Lambert Academic Publishing RU, 2021. 696 p. (in Russian).